Matemática Discreta I Primer parcial	1^{er} Apellido: ____________	31 de octubre de 2018
	2^{o} Apellido: ____________	Tiempo 2 horas
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ____________ Número de matrícula:	**Nota:**

Ejercicio 1 (6 puntos)

a) En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la relación aRb con $a, b \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $7|(b-a)$, donde $|$ es la relación de divisibilidad, es decir, $x|y$ significa que "x divide a y". Demuestra que se trata de una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$, y encuentra las clases de equivalencia de los elementos 0 y 3, es decir, encuentra las clases [0] y [3].

b) Calcula el cardinal del conjunto $C = \{k \in \mathbb{Z}, k \geq 0 : k|437 \text{ o } k|473\}$.

Solución:

a) R es relación de equivalencia si cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

R es reflexiva puesto que $7|(a-a)$, luego aRa.
R es simétrica puesto que si aRb, y por lo tanto $7|(a-b)$, también tenemos que $7|(b-a)$, es decir bRa.
R es transitiva puesto que si aRb y bRc, es decir, si se tiene que $7|(a-b)$ y $7|(b-c)$, también se cumple que $7|(a-c)$, y por lo tanto aRc.

$$\left.\begin{array}{r} aRb \Rightarrow 7|(a-b) \Rightarrow a-b=7p \\ bRc \Rightarrow 7|(b-c) \Rightarrow b-c=7q \end{array}\right\} \Rightarrow a-b+b-c=7p+7q \Rightarrow a-c=7(p+q) \Rightarrow 7|(a-c) \Rightarrow aRc$$

Luego R es efectivamente relación de equivalencia.

Las clases de equivalencia son:

$[0] = \{x \in \mathbb{Z} : 0Rx\} = \{x \in \mathbb{Z} : 7|x\} = \{7x, x \in \mathbb{Z}\} = \{..., -21, -14, -7, 0, 7, 14, 21, ...\}$
$[3] = \{x \in \mathbb{Z} : 3Rx\} = \{x \in \mathbb{Z} : 7|(x-3)\} = \{7x+3, x \in \mathbb{Z}\} = \{..., -18, -11, -4, 3, 10, 17, 24, ...\}$

b) Factorizamos ambos números y obtenemos que $437 = 19 \cdot 23$ y $473 = 11 \cdot 43$, luego 437 y 473 son coprimos y sólo tienen como divisor común al 1. Por lo tanto $|C| = 4 + 4 - 1 = 7$.

Ejercicio 2 (12 puntos)

Considera el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 15, 24, 90, 180, 360\}$ con la relación de orden de divisibilidad $|$ descrita en el ejercicio anterior.

a) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(A, |)$.

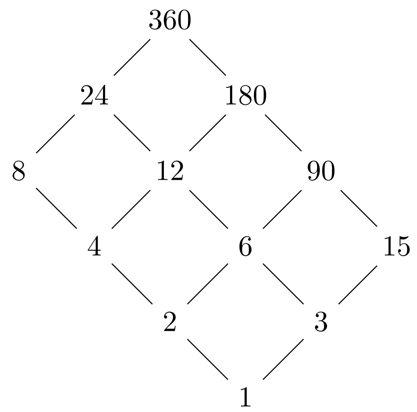
b) Obtén las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales, si los hay, del subconjunto $B = \{2, 3, 4, 6, 12, 180\}$.

c) Razona si los elementos 6 y 15 tienen complementario en A, y en caso afirmativo obténlos.

d) Razona si A es un Álgebra de Boole.

Solución:

a)



b)
Maximales: $\{180\}$
Minimales: $\{2, 3\}$
Máximo: 180
Mínimo: $\nexists$
Cotas superiores: $\{180, 360\}$
Cotas inferiores: $\{1\}$
Supremo: 180
Ínfimo: 1

c) El elemento 6 no tiene complementario, el complementario del 15 es 8.

d) No es álgebra de Boole puesto que A no es retículo complementario (como se vio en el apartado anterior, no todos los elementos poseen complementario).

Ejercicio 3 (5 puntos)

Encuentra la expresión más sencilla que detecte los números impares de un solo dígito que sean primos o múltiplos de tres.

Solución:

Utilizamos una función booleana con 4 variables para representar los 10 dígitos $0, 1, ..., 9$. Los dígitos primos son $\{2, 3, 5, 7\}$ y los múltiplos de 3 son $\{0, 3, 6, 9\}$, luego los números dígitos impares primos o múltiplos de tres son $\{3, 5, 7, 9\}$. Describimos una función que detecte el conjunto anterior con la siguiente tabla de verdad incompleta:

x	y	z	t	f(x,y,z,t)	digito
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	2
0	0	1	1	1	3
0	1	0	0	0	4
0	1	0	1	1	5
0	1	1	0	0	6
0	1	1	1	1	7
1	0	0	0	0	8
1	0	0	1	1	9
1	0	1	0	-	-
1	0	1	1	-	-
1	1	0	0	-	-
1	1	0	1	-	-
1	1	1	0	-	-
1	1	1	1	-	-

La expresión que describe dicha función es $f(x, y, z, t) = x'y'zt + x'yz't + x'yzt + xy'z't$, que podemos

simplificar utilizando el siguiente mapa de Karnaugh:

	y	y	y’	y’	
x				0	t’
x				1	t
x’	1	1	1	0	t
x’	0	0	0	0	t’
	z’	z	z	z’	

La expresión booleana más sencilla en forma de suma de productos es $f(x, y, z, t) = xt + yt + zt$, que podemos simplificar aún más como $f(x, y, z, t) = (x + y + z)t$.

Ejercicio 4 (5 puntos)

Demuestra por inducción que para todo $n \geq 1$ se cumple la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Solución:

1) Comprobamos la condición inicial: para $n = 1$ tenemos $1^3 = 1$ y $\frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4} = 1$ que son iguales.

2) Hipótesis de Inducción: suponemos el resultado cierto para $n = k$, es decir, $\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$.

3) Comprobamos que el resultado es cierto para $n = k + 1$ (utilizando la hipótesis de inducción)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &= 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\sum_{i=1}^{k} i^3\right) + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)(k+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Luego aplicando el teorema de Inducción el resultado es cierto para todo $n \geq 1$.

Ejercicio 5 (7 puntos)

Los 21 alumnos de 3 años de un colegio de Extremadura desayunan dos veces a la semana con productos que una empresa local regala al colegio en paquetes de 12 unidades. El desayuno consiste en un batido de leche por alumno. Sabiendo que la promoción ha durado entre 12 y 16 semanas y que han sobrado 18 batidos, ¿cuántos paquetes de batidos ha podido regalar la empresa al colegio? Razona la solución utilizando el algoritmo de Euclides.

Solución:

Sean x el número de paquetes regalados por la empresa, e y el número de semanas que ha durado la promoción, tenemos que la empresa ha regalado $12x$ batidos de leche y los alumnos han consumido $(2 \cdot 21)y$ batidos. Como han sobrado 18 batidos, tenemos que

$$12x - 42y = 18.$$

Usamos el algoritmo de Euclides para calcular que $\mathrm{mcd}(12, 42) = 6$.

$$\begin{aligned}
42 &= 3 \cdot 12 + 6 \\
12 &= 2 \cdot 6 + 0
\end{aligned}$$

Como $\mathrm{mcd}(12, 42) = 6$ divide a 18, tenemos que la ecuación diofántica $12x - 42y = 18$ tiene soluciones enteras. Usando ahora el algoritmo extendido de Euclides tenemos que $6 = 42 - 3 \cdot 12$, luego podemos encontrar

una solución inicial (x_0, y_0) de la ecuación diofántica teniendo en cuenta que

$$12 \cdot (-9) - 42 \cdot (-3) = 6 \cdot 3$$
$$x_0 = -9, \quad y_0 = -3$$

y todas las soluciones son:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{(-42)}{6}t \\ y = y_0 - \frac{12}{6}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 - 7t \\ y = -3 - 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Puesto que además debe cumplirse que $y \geq 12$ e $y \leq 16$, tenemos que

$$\begin{cases} -3 - 2t \geq 12 \\ -3 - 2t \leq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq -\frac{15}{2} \\ t \geq -\frac{19}{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Existen por lo tanto dos posibles soluciones:

(1) $t = -9$, la promoción ha podido durar 15 semanas y la empresa regaló 54 paquetes de batidos, o
(2) $t = -8$, la promoción ha podido durar 13 semanas y la empresa regaló 47 paquetes de batidos.